

Ismerkedés a teljes indukcióval – megoldások a szakkörösöktől

1. feladat Fel lehet-e bontani a 10 pozitív egész kitevős hatványait két négyzetszám összegére?

Megoldás: $10^1 = 10$, ami felírható két négyzetszám összegeként, úgy, hogy $1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$.

Ha mindkét tagot az összeadásban x^2 -tel megszorozzuk, akkor az összeg is x^2 -szeresére nő. Azért kell x^2 -tel szorozni, hogy négyzetszám legyen mindegyik szorzat.

Ha x 10 pozitív egész kitevős hatványa, akkor máris felbontottuk 10 páratlan kitevős hatványait két négyzetszám összegére: $10^3 = 10^2 \times 1 + 10^2 \times 9 = 10^2 + 30^2$, általánosan $10^{2k+1} = 10^{2k} \times 1 + 10^{2k} \times 9 = 10^{2k} + 30^{2k}$.

$10^2 = 100$, ami felírható két négyzetszám összegeként, úgy, hogy $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.

Az előbbi ötlettel most 10 páros kitevős hatványait írhatjuk fel: $10^{2k+2} = 10^{2k} \times 36 + 10^{2k} \times 64 = 60^{2k} + 80^{2k}$.
10 összes pozitív egész kitevős hatványát felírtuk két négyzetszám összegeként.

Új feladat Ez a történet a régmúltban játszódik. Még gőzmozdonyok húzták a vonatokat, s gyakran megegett, hogy az ablakon beszállt a korom. Egy verőfényes nyári napon nyolc mogorva utas utazott egy fülkében. Az egész utazás alatt nem beszéltek egymással, még köszönésre sem méltatták útitársaikat. (Udvariatlanok is voltak.) Az ablakon beszálló füsttől néhányuk arca kormos lett. A fülkében és az egész vonaton sem volt tükör, így erről a tényről nem szerezhettek tudomást. Bejött a kalauz. Mivel az utasok vele is udvariatlanok voltak, így ő is csak mérsékeltlen volt segítőkész.

– Uraim – mondta –, sajnos néhányuk arca kormos lett. Mosakodni csak az állomásokon lehet, de csak az szállhat le, aki biztos benne, hogy az ő arca kormos. Vizontlátásra!

Az utasok továbbra sem szóltak egymáshoz, meg se moccantak, nem törölgették az arcukat, nem keresték a tükörképüket sehol. Mogorva utasaink nagyon okosak: elmélyülten gondolkodtak, s feszülten figyeltek. Egy darabig nem történt semmi, majd a harmadik megállónál leszálltak néhányan. Hányan szálltak le, hányan lettek kormosak? (A két kérdés nem ugyanaz!)

Folytatásos feladat Egy négyzetet felbontottunk 1234567 négyzetre. Hány négyzetre lehet felbontani egy négyzetet? (2, 3, 5 részre nem lehet, ezt nem kell bizonyítani.)