Teljes indukció

A matematika egyik fontos bizonyítási módszere a teljes indukció. Egy állítást minden természetes számra be szeretnénk látni. Kipróbáljuk $n = 1$-re, hogy igaz-e az állítás. Ezután bebizonyítjuk, hogy n-ről $(n+1)$-re öröklődik az állítás. Ezzel készen is vagyunk, hiszen 1-re igaz, az öröklődés miatt 2-re is teljesül az állítás. De ha 2-re igaz, akkor 3-ra is öröklődik az állítás, és így tovább.

Például: a kormos utasok feladatát általánosítjuk. Ha k kormos utas van, akkor pontosan a k-adik megállóban szállnak le.

Bizonyítás: teljes indukcióval. Ha egy kormos utas van, akkor ő az első megállónál leszáll: tudja, hogy van kormos utas, de csak tiszta arcokat lát, ezért tudja, hogy ő kormos. A többiek látják, hogy egyik társuk kormos. Ők így gondolkoznak: ha én is kormos vagyok, akkor a másik ember arra vár, hogy én leszálljak az első megállónál, ő pedig nem száll le. Mivel leszállt, ezért ő az egyetlen kormos arcú a fülkében, vagyis én tiszta vagyok. Két kormos arcú utas esetén a piszkosak tudják, hogy egy vagy két kormos van. Várják, hogy az első megállóban a másik leszáll-e. Mivel nem szállt le, ezért a másodiknál mindketten leszállnak. A tiszták látnak két kormosat, innen tudják, hogy két vagy három kormos van. Egy tiszta utas így gondolkodik: ha két kormos van, akkor ők leszállnak a második megállónál. Ha én is kormos vagyok, akkor az egyik kormos arra vár, hogy a másik kormos és én leszálljunk a második megállónál. Mivel a két kormos leszállt, ezért én tiszta vagyok.

Most tegyük fel, hogy k kormos arcú utas esetén már tudjuk, hogy a k. megállóban leszállnak a kormosok, s a többiek ezután tudják, hogy ők tiszták. Lássuk be, hogy $k+1$ piszkos arcú ember esetén a $(k+1)$. megállóban fognak leszállni a kormosak, s a tiszták ettől kezdve tudják, hogy ők tiszták. Nézzük meg először, hogyan gondolkodok egy kormos! Ő k piszkosat lát, ezért arra vár, hogy mi történik a k. megállóban. Ha ő tiszta lenne, akkor a többiek leszállnának. Mivel nem szállnak le, ezért tudja, hogy ő is kormos, a $(k+1)$. megállóban leszáll a többi kormossal együtt. Egy tiszta így gondolkodik: ha én tiszta vagyok, akkor a $k+1$ piszkos arcú ember a $(k+1)$. megállóban leszáll. Ha én is kormos vagyok, akkor az első kormos arra vár, hogy én a többi k kormossal együtt leszálljak a $(k+1)$. megállóban. Mivel a kormosok leszálltak a $(k+1)$. megállóban, ezért én tiszta vagyok. Ezzel beláttuk, hogy a tulajdonság öröklődik: k kormos arcú utas a k. megállóban leszáll mosakodni. A kalauznak az volt a szerepe, hogy ő indította a folyamatot, tőle tudták az utasok, hogy van kormos közöttük. Ez tette lehetővé a $k = 1$ eset megoldását.

A sík részekre osztása Legfeljebb hány részre osztja 2020 **a)** egyenes, **b)** kör a síkot?

Megoldás Mindkét rész megoldását kísérletezéssel kezdjük. Kipróbáljuk, hogy 1, 2, 3, 4 egyenes illetve kör legfeljebb hány részre osztja a síkot. Észre lehet venni egy szabályszerűséget, ezt teljes indukcióval fogjuk igazolni.

a) 1 egyenes legfeljebb 2 részt, 2 egyenes 4, 3 egyenes 7, 4 pedig 10 részt hoz létre. Úgy tűnik, az eredeti 1 (a teljes sík) részhez az n. egyenes n új résszel járul hozzá, azaz n. egyenes legfeljebb $1+1+2+\dots+n = 1+\frac{n(n+1)}{2}$ részre bontja a síkot. Olyankor keletkezik a legtöbb rész, ha semelyik két egyenes nem párhuzamos, és a metszéspontokon mindig két egyenes megy át.

Állítás: n. egyenes legfeljebb $1+1+2+\dots+n = 1+\frac{n(n+1)}{2}$ részre bontja a síkot.

Bizonyítás: Teljes indukcióval. $n = 1$-et helyettesítve a képletbe 2-t kapunk, ez a megfigyelésünkkel megegyezik.

Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz az állítás, azaz k egyenes legfeljebb $1+\frac{k(k+1)}{2}$ részre bontja a síkot. Megmutatjuk, hogy a tulajdonság öröklődik, azaz $k+1$ egyenes legfeljebb $1+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ részre bontja a síkot. Amikor behúzzuk a $(k+1)$. egyenest, akkor az néhány eddigi részen áthalad, azokat két részre osztja. Amikor egy régi egyenest metsz, akkor új tartományba lép, s a következő metszéspontig abban halad. Az első k egyenessel legfeljebb k metszéspontja van, ezek az új egyenest $(k+1)$ részre bontják. Mindegyik darab egy-egy régi síkrészt ketté oszt, így $(k+1)$ résszel gyarapodik a tartományok száma. Összesen legfeljebb $1+\frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = 1+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ részre bontja $k+1$ egyenes a síkot. 2020 egyenes legfeljebb $1+\frac{2020\cdot 2021}{2} = 2041211$ részre bontja a síkot.

b) A próbálkozások alapján sejtésünk a következő: n kör legfeljebb n^2-n+2 részre osztja a síkot. Akkor kapjuk a legtöbb részt, ha mindegyik kör az összes többit 2-2 pontban metszi, és mindegyik metszésponton csak két kör halad át.

Bizonyítás: Teljes indukcióval. $n = 1$ kör $1 - 1 + 2 = 2$ részre bontja a síkot.

Tegyük fel, hogy $n = k$ kör $k^2 - k + 2$ részre osztja a síkot. Vegyük a $(k+1)$. kört! Néhány régi tartományt fel fog bontani két részre. Az új kör legfeljebb $2k$ pontban metszi a régieket, két metszéspont között egy tartományban halad az ív. A metszéspontok $2k$ részre bontják a kört, így az új kör $2k$ új síkrészt hoz létre. Így összesen $k^2 - k + 2 + 2k = (k+1)^2 - (k+1) + 2$ síkrészt kapunk.

2020 kör legfeljebb $2020^2 - 2020 + 2 = 4078382$ részre osztja a síkot.

Új feladat A Matkönyv 16.12-es feladata.
$(https://matkonyv.fazekas.hu/cache/pdf/vol_kombinatorika_i.pdf)$