

**Matkönyv 16.12** ([https://matkonyv.fazekas.hu/cache/pdf/vol\\_kombinatorika\\_i.pdf](https://matkonyv.fazekas.hu/cache/pdf/vol_kombinatorika_i.pdf))

Legyen  $H = \{2, 3, \dots, n\}$ . Tekintsük  $H$  nem üres részhalmazaiban az elemek szorzatát. Mennyi ezen számok reciprokösszege? Pl.  $n = 4$  esetén  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{3}{2}$ .

**Megoldás** Kipróbáljuk, hogy kis  $n$  értékekre mennyi lesz az összeg. Az a sejtésünk, hogy  $\frac{n-1}{2}$ . Teljes indukcióval fogunk bizonyítani.  $n = 2$  esetén  $\frac{1}{2}$ ,  $n = 3$  esetén  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ . Az állítás ezekben az esetekben igaz. Tegyük fel, hogy  $n = k$ -ra igaz az állítás, be fogjuk látni, hogy  $n = k + 1$ -re is teljesül. Amikor eggyel több szám van  $H$ -ban, akkor az összegben a régi tagok megmaradnak, és hozzá kell még venni néhányat. Az új tagok nevezője osztható lesz  $n + 1$ -gyel, szerepel az összes régi tag  $\frac{1}{n+1}$ -szerese és még  $\frac{1}{n+1}$ . Azaz összegünk  $\frac{n-1}{2} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{1}{n+1} = \frac{(n-1)(n+1) + (n-1) + 2}{2(n+1)} = \frac{n}{2}$  lesz.

**Új feladat** A sakktábla bal alsó és jobb felső mezőjét letakartuk. Lefedhető-e a megmaradt 62 mező 31 darab dominóval? (Egy dominó pontosan két mezőt takar le.)